

Natürliche Zahlen, besondere Zahlenmengen

A5_01

Menge der natürlichen Zahlen $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Menge der natürlichen Zahlen mit der Null $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Primzahlen: Eine Primzahl hat genau zwei Teiler, nämlich die 1 und sich selbst.
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Quadratzahlen: Wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert, ist das Ergebnis eine Quadratzahl: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $49 = 7^2$, $64 = 8^2$,
 $81 = 9^2$, $100 = 10^2$, $121 = 11^2$, $144 = 12^2$, $169 = 13^2$, $196 = 14^2$, $225 = 15^2$, $256 = 16^2$,
 $289 = 17^2$, $324 = 18^2$, $361 = 19^2$, $400 = 20^2$

Teiler- und Vielfachenmengen:

Menge der Teiler von 18 $T_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

Menge der Vielfachen von 7 $V_7 = \{7, 14, 21, \dots\}$

Element und Teilmenge

A5_02

3 ist ein Element von T_{18} : $3 \in T_{18}$

15 ist kein Element von V_7 : $15 \notin V_7$

T_{18} ist eine Teilmenge der natürlichen Zahlen: $T_{18} \subset N$

Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der ganzen Zahlen: $N \subset Z$

$\{1; 3; 5; \dots\} \subset N$

Ganze Zahlen

A5_03

Menge der ganzen Zahlen $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Betrag einer ganzen Zahl

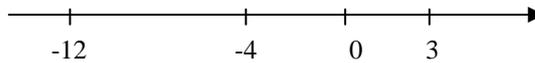
Abstand des Bildpunkts der Zahl auf der Zahlengeraden von der 0.

Beispiele: $|+7| = 7$, $|-5| = 5$

Anordnung der ganzen Zahlen

a ist kleiner als b, $a < b$, wenn der Bildpunkt von a auf der Zahlengeraden weiter links liegt als der Bildpunkt von b.

Beispiel: $-12 < -4$
 $-4 < 3$



Addition und Subtraktion in Z

A5_04

Fachausdrücke:

Beispiele: $(-45) + (+38) = -7$
Summe

1. Summand: -45, 2. Summand: +38, Wert der Summe: -7

$(-78) - (-35) = -43$
Differenz

Minuend: -78, Subtrahend: -35, Wert der Differenz: -43

Addition/Subtraktion von 0: $a + 0 = a$ für alle $a \in Z$
 $a - 0 = a$ für alle $a \in Z$

Terme, Termberechnung, Termgliederung

A5_05

Terme bestehen aus Zahlen, Rechenoperationen und Klammern.

Klammern haben Vorfahrt. Innere Klammern werden zuerst berechnet.
Die Rechenart, die als letzte durchgeführt wird, legt die Art des Terms fest.
Siehe auch A5_17!

$$\underbrace{\underbrace{(35-7)}_{\text{Differenz}} + \underbrace{[(88+12)-9]}_{\text{Differenz}}}_{\text{Summe}} = 28 + [100 - 9] = 28 + 91 = 119$$

Kommutativgesetz der Addition

A5_06

Für alle ganzen Zahlen gilt $a + b = b + a$

Beispiele: $(+8) + (+5) = (+5) + (+8)$ kurz: $8 + 5 = 5 + 8$
 $(-17) + (+23) = (+23) + (-17)$ kurz: $-17 + 23 = 23 - 17$
 $(+14) + (-8) = (-8) + (+14)$ kurz: $14 - 8 = -8 + 14$

Assoziativgesetz der Addition

Für alle ganzen Zahlen gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$

Beispiele: $[(+128) + (+36)] + (+14) = (+128) + [(+36) + (+14)]$
kurz: $(128 + 36) + 14 = 128 + (36 + 14)$
 $[(+536) + (+712)] + (-112) = (+536) + [(+712) + (-112)]$
kurz: $(536 + 712) - 112 = 536 + (712 - 112)$
 $[(+39) + (-11)] + (-19) = (+39) + [(-11) + (-19)]$
kurz: $(39 - 11) - 19 = 39 + (-11 - 19)$

Kurzschreibweise für Addition und Subtraktion in Z

A5_07

“Plus Plus ergibt Plus, Minus Minus ergibt Plus, Plus Minus ergibt Minus,
Minus Plus ergibt Minus“

Beispiele:

$$(+4) + (+7) = 4 + 7$$

$$(+16) - (+19) = 16 - 19$$

$$(-5) + (+13) = -5 + 13$$

$$(+17) + (-23) = 17 - 23$$

$$(-9) - (-34) = -9 + 34$$

$$(-12) + (-19) = -12 - 19$$

$$(+25) - (-33) = 25 + 33$$

$$(-45) - (+59) = -45 - 59$$

Addition und Subtraktion von Zahlen mit gleichen/verschiedenen Vorzeichen

A5_08

Gleiche Vorzeichen:

Die Beträge werden addiert, das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen

Verschiedene Vorzeichen:

Die Beträge werden subtrahiert, das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl, die den größeren Betrag hat

$$183 + 57 = 240$$

$$-45 - 37 = -(45 + 37) = -82$$

$$35 - 47 = -(47 - 35) = -12$$

$$-23 + 19 = -(23 - 19) = -4$$

$$-17 + 28 = +(28 - 17) = 11$$

$$98 - 13 = +(98 - 13) = 85$$

Vorteilhaft rechnen mit dem Kommutativ- und Assoziativgesetz**A5_09**

$$\text{a) } 138 - 526 - 768 + 1026 \underset{\text{K}}{=} 1026 - 526 + 138 - 768 \underset{\text{A}}{=} 500 - 630 = -130$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -562 + 468 + 132 - 318 - 235 &\underset{\text{K}}{=} -562 - 318 + 468 + 132 - 235 \underset{\text{A}}{=} \\ &-880 + 600 - 235 \underset{\text{K,A}}{=} 600 - 1115 = -515 \end{aligned}$$

$$\text{c) } (512 + 63) + 37 \underset{\text{A}}{=} 512 + (63 + 37) = 512 + 100 = 612$$

$$\text{d) } 23 + (127 - 89) = (23 + 127) - 89 = 150 - 89 = 61$$

$$\text{e) } 723 - (123 + 258) = (723 - 123) - 258 = 600 - 258 = 342$$

Multiplikation**A5_10**

Fachausdrücke: Beispiel: $\underbrace{7524 \cdot 84}_{\text{Produkt}} = 632016$

1. Faktor: 7524, 2. Faktor: 84, Wert des Produkts: 632016

Multiplikation mit 0 und 1: $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$

$a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$

Kommutativgesetz der Multiplikation:

Für alle ganzen Zahlen gilt: $a \cdot b = b \cdot a$

Beispiel: $17 \cdot 36 = 36 \cdot 17 = 612$

Assoziativgesetz der Multiplikation:

Für alle ganzen Zahlen gilt: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Beispiel: $8 \cdot (25 \cdot 17) = (8 \cdot 25) \cdot 17 = 200 \cdot 17 = 3400$

Potenzen

A5_11

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad a \text{ ist die } \mathbf{Basis}, n \text{ ist der } \mathbf{Exponent} \text{ der Potenz}$$

Beispiele: $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$$

Zehnerpotenzen:

Anzahl der Nullen einer Stufenzahl = Exponent der Zehnerpotenz

Beispiel: $1000 = 10^3$

Große Zahlen:

$1 \text{ Million} = 10^6$, $1 \text{ Milliarde} = 10^9$, $1 \text{ Billion} = 10^{12}$, $1 \text{ Billiarde} = 10^{15}$, ...

Division

A5_12

Fachausdrücke: Beispiel: $\underbrace{128394 : 42}_{\text{Quotient}} = 3057$

Dividend: 128394, Divisor: 42, Wert des Quotienten: 3057

Division mit 0 und 1:

$$a : 1 = a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{Z}$$

$$0 : a = 0, \quad \text{wenn } a \neq 0$$

$$a : 0 \text{ geht nicht!!!}$$

Maßstab

A5_13

1 : M bedeutet, dass die Länge der Wirklichkeit durch M dividiert wird, um die Länge in der Zeichnung zu erhalten.

Beispiel: Maßstab 1 : 75000

Eine Strecke mit der wirklichen Länge 1,5 km wird in der Zeichnung
 $150000 \text{ cm} : 75000 = 2 \text{ cm}$ lang

12 mm in der Zeichnung sind in Wirklichkeit

$12 \text{ mm} \cdot 75000 = 900000 \text{ mm} = 900 \text{ m}$

Multiplikation mit negativen Zahlen

A5_14

Produkt mit 2 Faktoren:

Der Wert des Produkts ist positiv, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen haben.

Produkt mit mehr als 2 Faktoren:

Der Wert des Produkts ist positiv, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist und negativ, wenn die Anzahl der negativen Faktoren ungerade ist.

Beispiele: $(-3) \cdot (-4) = +12$; $(+3) \cdot (+4) = +12$; $(-3) \cdot (+4) = -12$;
 $(+3) \cdot (-4) = -12$; $(-3) \cdot (+4) \cdot (-5) = +60$;
 $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (+6) = -360$; $(-2)^8 = +256$; $(-2)^9 = -512$;

Division mit negativen Zahlen

A5_15

Der Wert des Quotienten ist positiv, wenn Dividend und Divisor das gleiche Vorzeichen haben.

Der Wert des Quotienten ist negativ, wenn Dividend und Divisor verschiedene Vorzeichen haben.

Beispiele:

$$(+36) : (+9) = +4; \quad (-36) : (-9) = +4; \quad (-36) : (+9) = -4; \quad (+36) : (-9) = -4;$$

Distributivgesetz

A5_16

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c \quad (a - b) : c = a : c - b : c$$

Beispiele:

$$52 \cdot 13 = \quad (50 + 2) \cdot 13 = 50 \cdot 13 + 2 \cdot 13 = 650 + 26 = 676;$$

$$99 \cdot 17 = \quad (100 - 1) \cdot 17 = 1700 - 17 = 1683;$$

$$112 : 4 = \quad (100 + 12) : 4 = 100 : 4 + 12 : 4 = 25 + 3 = 28;$$

$$196 : 4 = \quad (200 - 4) : 4 = 200 : 4 - 4 : 4 = 50 - 1 = 49;$$

Verbindung der Grundrechenarten

A5_17

Regeln: 1. Klammern haben Vorfahrt
2. Punkt vor Strich
3. Potenzen werden zuerst berechnet

Siehe auch A5_05!

Beispiele:

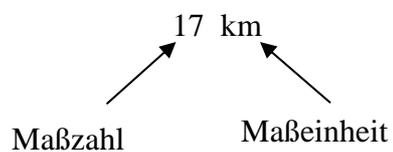
$$\begin{aligned} \text{a) } 284 : (238 - 3 \cdot 2^5) + 81 \cdot 12 &= 284 : (238 - 3 \cdot 32) + 972 = \\ 284 : (238 - 96) + 972 &= 284 : 142 + 972 = 2 + 972 = 974 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } [(-3)^3 \cdot 5 - (18 - 108) : (-3)] : [(28 - 149) : 11] - 16 &= \\ [(-27) \cdot 5 - (-90) : (-3)] : [(-121) : 11] - 16 &= \\ [-135 - (+30)] : [-11] - 16 &= \\ [-165] : [-11] - 16 &= 15 - 16 = -1 \end{aligned}$$

Größen

A5_18

Eine Größe besteht aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit



Beispiele für Größen: Geld, Masse, Länge, Fläche, Zeit

Länge**A5_19**

Einheitentabelle:

1 km	100 m	10 m	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
			1	2	0	3
5	0	2	0			
		8	7			

1,203 m = 1203 mm;
5 km 20 m = 5,02 km;
87 m = 0,087 km

Masse**A5_20**

Einheitentabelle:

1 t	100 kg	10 kg	1 kg	100 g	10 g	1 g	100 mg	10 mg	1 mg
					7	6	0	5	0
			7	0	5				
		3	2						

76,050 g = 76 g 50 mg;
7 kg 50 g = 7050 g;
0,032 t = 32 kg;

Zeit

A5_21

Einheiten	Jahr	1 a = 365 d
	Tag	1 d = 24 h
	Stunde	1 h = 60 min
	Minute	1 min = 60 s
	Sekunde	1 s

Beispiel:

$$9 \text{ h } 34 \text{ min } 8 \text{ s} = 9 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} + 34 \cdot 60 \text{ s} + 8 \text{ s} = 34448 \text{ s}$$

Addition/Subtraktion von Größen

A5_22

Nur gleichartige Größen können addiert/subtrahiert werden

Ohne Kommaschreibweise: Zuerst in die kleinste vorkommende Einheit umwandeln und dann addieren/subtrahieren

Mit Kommaschreibweise: Auf gleiche Einheit achten und stellenweise addieren beziehungsweise subtrahieren

Beispiele:

$$8 \text{ km } 30 \text{ m} - 760,5 \text{ m} = 80300 \text{ dm} - 7605 \text{ dm} = 72695 \text{ dm}$$

$$\text{oder: } 8,030 \text{ km} - 0,7605 \text{ km} = 7,2695 \text{ km}$$

$$57,2 \text{ kg} + 0,8 \text{ km} - 250 \text{ m} \quad \text{⚡}$$

Multiplikation/Division von Größen mit natürlichen Zahlen

A5_23

Umwandeln, so dass die Maßzahl eine natürliche Zahl wird, anschließend multiplizieren/dividieren.

Multiplikation mit einer Stufenzahl (10, 100, 1000, ...):

Das Komma wird um so viele Stellen nach rechts verschoben, wie die Stufenzahl Nullen hat.

Division durch eine Stufenzahl:

Das Komma wird um so viele Stellen nach links verschoben, wie die Stufenzahl Nullen hat.

Beispiele:

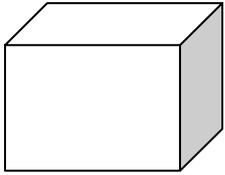
$$87,2 \text{ kg} \cdot 7 = 87200 \text{ g} \cdot 7 = 610400 \text{ g} = 610,4 \text{ kg}$$

$$1 \text{ km } 508 \text{ m} : 290 = 15080 \text{ dm} : 290 = 52 \text{ dm} = 5,2 \text{ m}$$

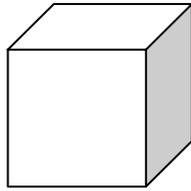
$$36,05 \text{ km} \cdot 10 = 360,5 \text{ km}; \quad 13,02 \text{ t} : 1000 = 0,01302 \text{ t}$$

Geometrische Körper

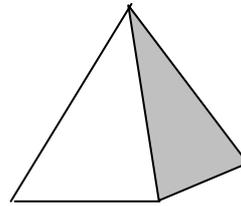
G5_01



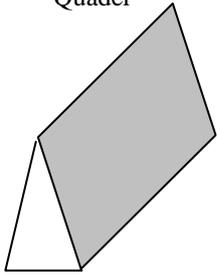
Quader



Würfel



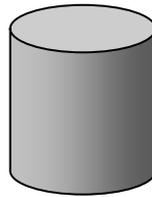
Pyramide



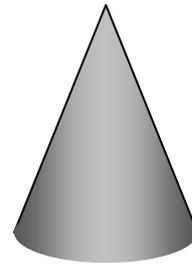
Prisma



Kugel



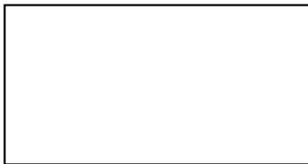
Zylinder



Kegel

Geometrische Grundfiguren

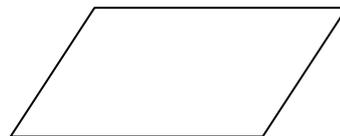
G5_02



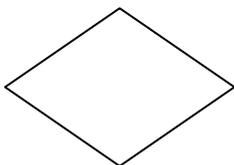
Rechteck



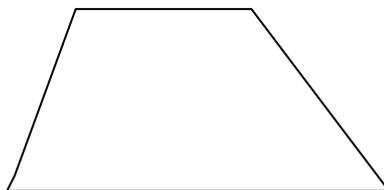
Quadrat



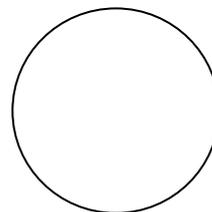
Parallelogramm



Raute



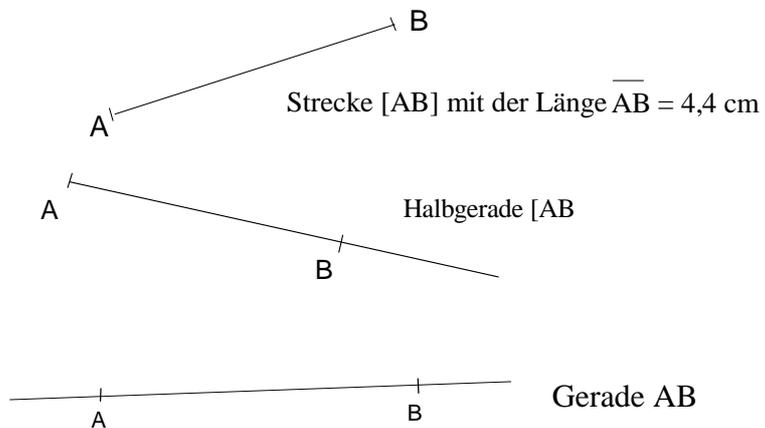
Trapez



Kreis

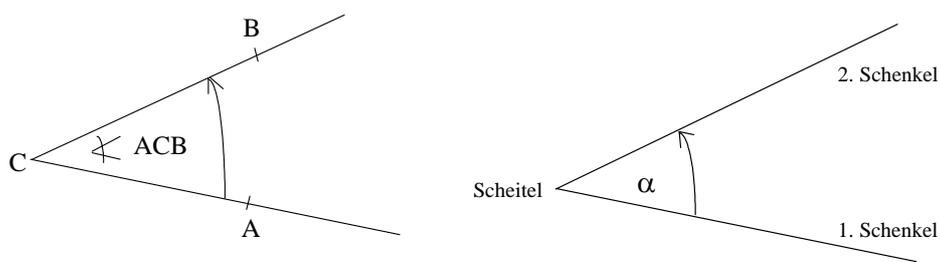
Strecke, Gerade, Halbgerade

G5_03



Winkel

G5_04

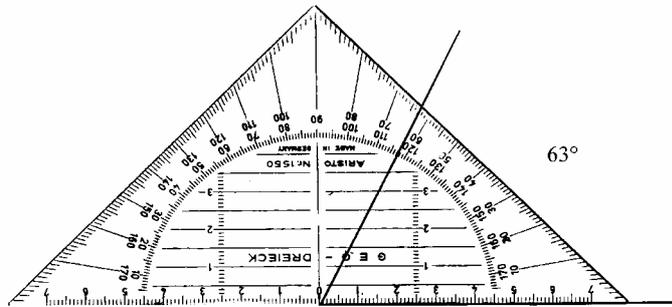


Winkel werden gegen den Uhrzeigersinn gemessen.

Winkel werden mit griechischen Buchstaben oder mit Hilfe von 3 Punkten bezeichnet.

Winkel messen/zeichnen

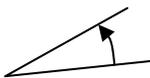
G5_05



Winkelarten

G5_06

spitzer Winkel: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



rechter Winkel: 90°



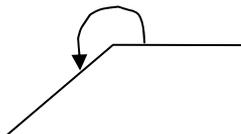
stumpfer Winkel: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



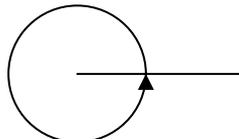
gestreckter Winkel: 180°



Überstumpfer Winkel: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$



Vollwinkel: 360°



Senkrecht

G5_07

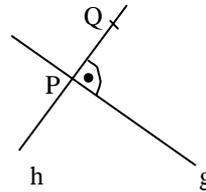
Zwei Geraden sind zueinander senkrecht, wenn sie miteinander einen 90° -Winkel bilden

$$g \perp h$$

g ist das Lot zu h im Punkt P

h ist das Lot von Q auf g

\overline{PQ} ist der Abstand des Punktes Q von der Geraden g



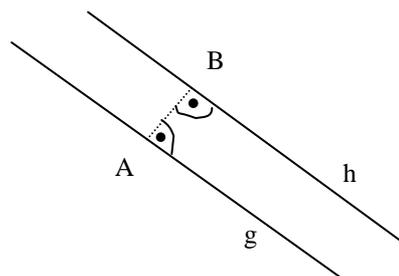
Parallel

G5_08

Zwei Geraden sind zueinander parallel, wenn sie immer denselben Abstand haben

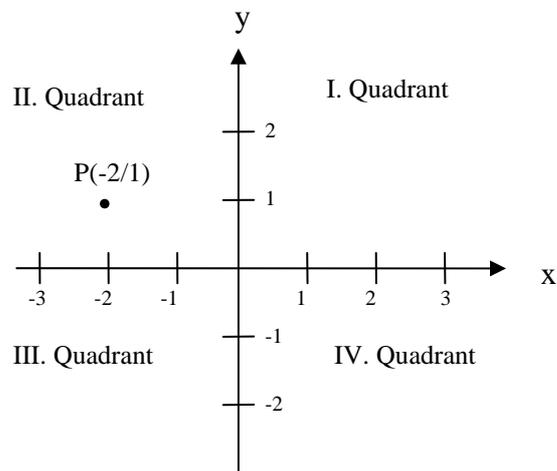
$$g \parallel h$$

Abstand $d = \overline{AB}$



Koordinatensystem

G5_09

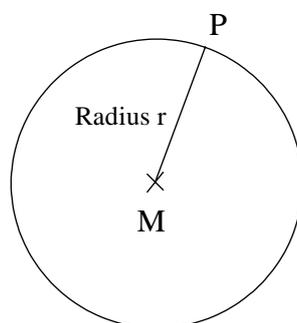


Kreis

G5_10

Alle Punkte P auf der Kreislinie haben denselben Abstand vom Mittelpunkt M:

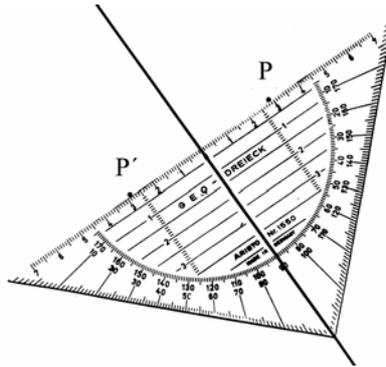
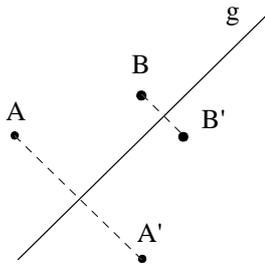
$$r = \overline{PM}$$



Achsensymmetrie

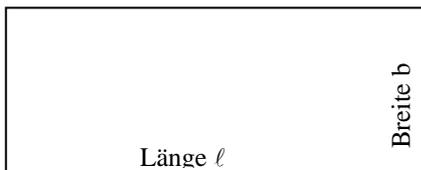
G5_11

Punkt und Bildpunkt haben denselben Abstand von der Symmetrieachse



Umfangslänge und Flächeninhalt von Rechteck und Quadrat

G5_12



$$u_R = 2 \cdot (\ell + b)$$

$$A_R = \ell \cdot b$$

Beispiele:

$$\ell = 5 \text{ cm}, b = 12 \text{ mm}$$

$$u_R = 2 \cdot (50 \text{ mm} + 12 \text{ mm}) = 2 \cdot 62 \text{ mm} = 124 \text{ mm} = 12,4 \text{ cm};$$

$$A_R = 50 \text{ mm} \cdot 12 \text{ mm} = 6000 \text{ mm}^2 = 60 \text{ cm}^2$$



$$u_Q = 4 \cdot s$$

$$A_Q = s^2$$

$$s = 6 \text{ cm}$$

$$u_Q = 4 \cdot 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm};$$

$$A_Q = (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2;$$

Flächeneinheiten

G5_13

1 km ²	10 ha	1 ha	10 a	1 a	10 m ²	1 m ²	10 dm ²	1 dm ²	10 cm ²	1 cm ²	10 mm ²	1 mm ²
		8	0	0	3	5						
						7	2					
								2	5	7		

$$8 \text{ ha } 35 \text{ m}^2 = 80035 \text{ m}^2;$$

$$7,2 \text{ m}^2 = 72000 \text{ cm}^2;$$

$$2,57 \text{ dm}^2 = 0,0257 \text{ m}^2;$$

Rechnen mit Flächeninhalten

G5_14

Fläche · Zahl = Fläche

Beispiel: 8 Grundstücke mit jeweils 935 m².

$$\text{Gesamtgröße: } 8 \cdot 935 \text{ m}^2 = 7480 \text{ m}^2 = 0,748 \text{ ha}$$

Fläche : Zahl = Fläche

Beispiel: 1,38 ha wird in 15 gleich große Grundstücke aufgeteilt.

$$\text{Grundstücksgröße: } 1,38 \text{ ha} : 15 = 13800 \text{ m}^2 : 15 = 920 \text{ m}^2$$

Fläche : Länge = Länge

Beispiel: Ein rechteckiger Acker hat 1,06 ha Flächeninhalt, er ist 53 m lang.

$$\text{Breite: } 1,06 \text{ ha} : 53 \text{ m} = 10600 \text{ m}^2 : 53 \text{ m} = 200 \text{ m}$$

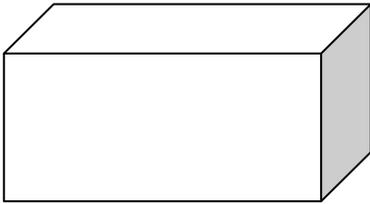
Fläche : Fläche = Zahl

Beispiel: 114 m² werden in Beete von jeweils 9,5 m² Flächeninhalt aufgeteilt.

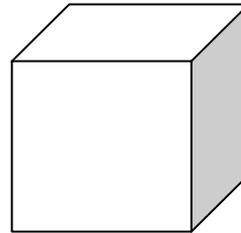
$$\text{Anzahl der Beete: } 114 \text{ m}^2 : 9,5 \text{ m}^2 = 11400 \text{ dm}^2 : 950 \text{ dm}^2 = 12$$

Oberflächeninhalt von Quader und Würfel

G5_15



$$A_Q = 2 \cdot (\ell \cdot b + \ell \cdot h + b \cdot h)$$



$$A_W = 6 \cdot s^2$$

Beispiele:

a) Ein Quader ist 26 cm lang, 19 cm breit und 1,5 cm hoch. Inhalt der Oberfläche?

$$\begin{aligned} A_Q &= 2 \cdot (260 \text{ mm} \cdot 190 \text{ mm} + 260 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm} + 190 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm}) = \\ &= 2 \cdot (49400 \text{ mm}^2 + 3900 \text{ mm}^2 + 2850 \text{ mm}^2) = 2 \cdot 56150 \text{ mm}^2 = \\ &= 112300 \text{ mm}^2 = 1123 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

b) Ein Würfel hat den Oberflächeninhalt $13,5 \text{ cm}^2$. Kantenlänge s ?

$$A_W = 6 \cdot s^2 = 13,5 \text{ cm}^2; \quad s^2 = 1350 \text{ mm}^2 : 6 = 225 \text{ mm}^2; \quad s = 15 \text{ mm}$$