Variable und Terme **A 7_01**

Variable sind Platzhalter für Zahlen aus einer vorgegebenen **Grundmenge G**,
z. B. $x \in$ IN; $y \in \mathbb{Z}$; $a \in$ Q

Jede sinnvolle Zusammenstellung aus Zahlen und Variablen mit Hilfe von Rechenzeichen nennt man **Term**.

Bsp.: $x + 2$; $4x – 6(x – 2)$; $18:3 + 9$

Vereinbarung: Wenn es zu keinen Verwechslungen kommen kann, darf der Malpunkt bei Termen weggelassen werden.

Bsp.: $5 \cdot x = 5x$;
$x \cdot y = xy$;
$4 \cdot (x-3) = 4(x-3)$

Berechnen von Termwerten **A 7_02**

Terme bezeichnen wir abkürzend mit einem T. Treten in einem Term Variablen auf, geben wir diese nach dem T in runden Klammern an.

Bsp.: $T(x) = 5x + 2$
$T(x; y) = 3y(6 + x^2)$

Werden für die Variablen eines Terms Zahlen eingesetzt, kann der Wert des Terms berechnet werden.

$T (2) = 5\ 2 + 2 = 10 + 2 = 12$ oder $T(8) = 5 \cdot 8 + 2 = 40 + 2 = 42$

$T (1; 3) = 3 \cdot 3 \cdot (6 + 1^2) = 9 \cdot 7 = 63$ oder $T (5; 0) = 3 \cdot 0 \cdot (6 + 5^2) = 0 \cdot 31 = 0$

Äquivalente Terme

Zwei Terme T_1 und T_2 heißen **äquivalent**, wenn bei **jeder möglichen Einsetzung** für die Variablen beide Terme stets den gleichen Wert annehmen.

Bsp.: $T_1 (x) = 4x – 8$ und $T_2 (x) = 4(x – 2)$
$T_1 (5) = 4 \cdot 5 – 8 = 12$ und $T_2 (5) = 4(5 – 2) = 12$

Gleichartige Terme, Zusammenfassen von Termen **A 7_03**

Terme, die aus den gleichen Variablen bestehen, heißen **gleichartig**. Die Faktoren vor den Variablen heißen Beizahlen oder **Koeffizienten.**
Bsp.: 5x => 5 ist der Koeffizient, x die Variable

Gleichartige Terme werden addiert (bzw. Subtrahiert), indem man die zugehörigen Koeffizienten addiert (bzw. Subtrahiert) und die gemeinsamen Variablen beibehält. Nicht gleichartige Terme können nicht zusammengefasst werden!

Beispiele: $10x + 5x – 3x = 15x – 3x = 12x$
$7ax – 13ax = - 6ax$
$10a + 4b – b – 8a = 10a – 8a + 4b – b = 2a + 3b$

Vereinfachen von Produkten bzw. Quotienten **A 7_04**

In einem **Produkt** dürfen die Faktoren beliebig umgestellt und zusammengefasst werden. Wir gehen in folgender Reihenfolge vor:

1. Wir entscheiden auf Grund der Vorzeichenregel, welches das Ergebnis hat
2. Wir multiplizieren die Zahlen miteinander
3. Wir multiplizieren die Variablen

Bsp.: $5a \cdot 6b = 30ab$
$(-3x) \cdot (+5xy) = - 15x^2y$

Bei der Division gehen wir analog zum Produkt vor. Bei einigen Quotienten bietet es sich an, sie als Brüche umzuschreiben.

Bsp.: $36x : 4x = 9$
$45x^2y : 5xy = 9x$
$3ab : 9b = \frac{3 \cdot a \cdot b}{9 \cdot b} = \frac{1b}{3} = \frac{1}{3}b$

Auflösen der Klammer bei der Addition und der Subtraktion — A 7_05

Steht vor einer Klammer ein **Pluszeichen**, so kann man die Klammer weglassen, ohne dass sich der Wert des Terms ändert.

Bsp.: $24 + (3x – 5y + 8) = 24 + 3x – 5y + 8 = 32 + 3x –5y$
$8a + (-9 + 12a) = 8a – 9 +12a = 20a - 9$

Steht vor einer Klammer ein **Minuszeichen**, so wird beim Auflösen der Klammer jedes **Pluszeichen** in der Klammer zu **minus** und jedes **Minuszeichen zu plus.**
Bsp.: $5 – (3x – 10) = 5 – 3x + 10 = 15 – 3x$
$6x –(- 4x – 16) = 6x + 4x + 16 = 10x + 16$

Distributivgesetz — A 7_06

Distributivgesetz

der **Multiplikation**

$(a + b) \cdot c = c \cdot (a + b) = a \cdot c + b \cdot c$
$(a - b) \cdot c = c \cdot (a - b) = a \cdot c - b \cdot c$

der **Division**

$(a + b) : c = a : c + b : c$
$(a - b) : c = a : c - b : c$

Multiplizieren von Summen und Differenzen **A 7_07**

Zwei Summen (Differenzen) werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der ersten summe (Differenz) mit jedem Glied der zweiten Summe (Differenz) **unter Beachtung der Vor- und Rechenzeichen** multipliziert und dann die Teilprodukte addiert bzw. subtrahiert.

Bsp.:
$(7 + x) \cdot (4x + 5) = 7 \cdot 4x + x \cdot 4x + 7 \cdot 5 + x \cdot 5 = 28x + 4x^2 + 35 + 5x = 4x^2 + 33x + 35$

$(2 - 3x) \cdot (x + 6) = 2 \cdot x - 3x \cdot x + 2 \cdot 6 - 3x \cdot 6 = 2x - 3x^2 + 12 - 18x = -3x^2 - 16x + 12$

Faktorisieren: Ausklammern **A 7_08**

Durch Ausklammern eines Faktors wird aus einer Summe oder einer Differenz ein **Produkt.** Beim Ausklammern werden gleiche Faktoren vor die Klammer gesetzt.
Bsp.: $4x - 8 = 4(x - 2)$
$21xy + 9y^2 = 3y(7x + 3y)$
$6ab + 18a^2b - 36a^3b = 6ab(1 + 3a - 6a^2)$

Ausklammern von –1 bewirkt, dass sich in der Klammer die Vorzeichen umdrehen: $-12xy + 7 = (-1)(12xy - 7) = -(12xy - 7)$

Lösen einer Gleichung A 7_09

Gleichungen wie z.B. $3x + 14 = 4x - 2$ löst man, indem man sie so lange umformt, bis man auf den einfachen Typ $x = a$ kommt. Man verwendet hierfür Äquivalenzumformungen, d.h. Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert. (siehe A 7_02).
Folgende Umformungen verändern die Lösungsmenge einer gegebenen Gleichung nicht:

- Addition bzw. Subtraktion der selben Zahl bzw. des selben Terms auf beiden Seiten der Gleichung
- Multiplikation bzw. Division mit derselben von Null verschiedenen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.

Bsp.: Ermitteln der Lösungsmenge einer Gleichung über der Grundmenge G

$x - 4 = 1$; G = IN	$3x + 6 = 7x - 2$; G = Z
$x - 4 = 1 \quad \vert + 4$	$3x + 6 = 7x - 2 \quad \vert +2 - 3x$
$x - 4 + 4 = 1 + 4$	$8 = 4x \quad \vert :4$
$x = 5$	$0,5 = x$
IL = { 5 }	IL = { 0,5 }

Prozentrechnung A 7_10

Das **Ganze**, dessen Anteile verglichen werden, bildet den **Grundwert**.
Jeden **Anteil** am Ganzen, also am Grundwert, kann man (in **Bruchform** oder) in **Prozent** angeben; er stellt den **Prozentsatz** dar. Der jeweilige Teil des Ganzen bildet den **Prozentwert**. (s. A 6_14)
Wird der Grundwert (z.B. der Preis einer Ware) um p Prozent erhöht, so steigt er auf das $(1 + \frac{p}{100})$-Fache des ursprünglichen Werts. Man nennt $1 + \frac{p}{100}$ den **Wachstumsfaktor**.
Wird der Grundwert (z.B. der Preis einer Ware) um p Prozent vermindert, so nimmt er auf das $(1 - \frac{p}{100})$-Fache des ursprünglichen Werts ab. Man nennt $1 - \frac{p}{100}$ den **Abnahmefaktor**.

Arthmetisches Mittel **S 7_01**

Arithmetisches Mittel
Durchschnittswert

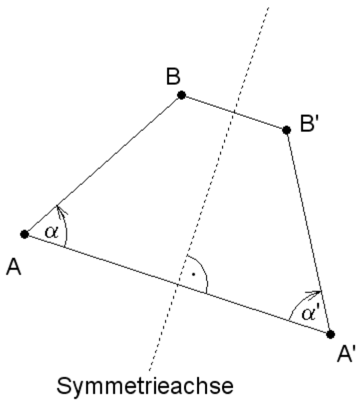
$$\left.\begin{array}{l}\text{Arithmetisches Mittel}\\ \text{Durchschnittswert}\end{array}\right\} \boxed{\frac{Summe aller Einzelwerte}{Anzahl aller Einzelwerte}}$$

Bsp.: Notendurchschnitt: mündliche Noten: 3,2,1,2,1
arithmetisches Mittel:

$$\frac{3+2+1+2+1}{5}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

<u>Achsensymmetrische Figuren</u> **G 7_01**

Eine Figur ist **achsensymmetrisch**, wenn man sie so falten kann, dass ihre beiden Teile genau aufeinander passen.
Die Faltkante bezeichnen wir als **Symmetrieachse.**

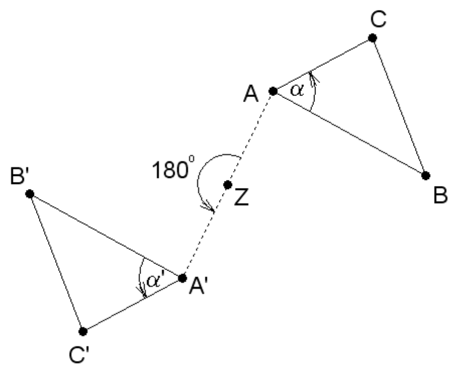


Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren:

- Zueinander symmetrische Strecken sind gleich lang (z.B. [AB] und [A'B']).
- Zueinander symmetrische Winkel sind gleich groß und haben entgegengesetzten Drehsinn (z.B. α und α').
- Jeder Punkt der Symmetrieachse ist von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.
- Die Verbindungsstrecke zweier zueinander symmetrischer Punkte (z.B. [AA']) wird von der Symmetrieachse rechtwinklig halbiert.

<u>Punktsymmetrische Figuren</u> **G 7_02**

Eine Figur ist **punktsymmetrisch**, wenn sie bei einer Drehung um 180° um einen Punkt Z (**Symmetriezentrum**) mit sich selbst zur Deckung kommt.



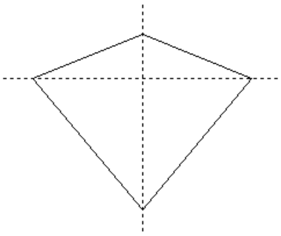
Eigenschaften punktsymmetrischer Figuren:

- Zueinander punktsymmetrische Strecken sind gleich lang und zueinander parallel (z.B.: [AB] und [A'B']).
- Zueinander punktsymmetrische Winkel sind gleich groß und haben den gleichen Drehsinn (z.B. α und α').
- Die Verbindungsstrecke zweier zueinander symmetrischer Punkte (z.B. [AA']) wird vom Symmetriezentrum halbiert.

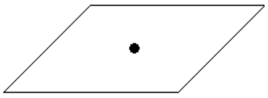
Symmetrische Vierecke

G 7_03

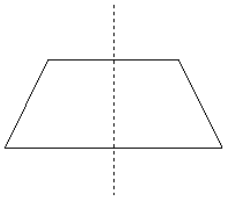
Drachenviereck

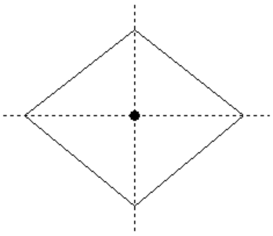


Parallelogramm

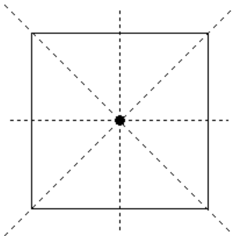


gleichschenkliges Trapez

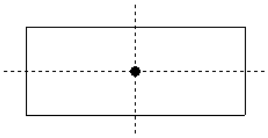




Raute



Quadrat



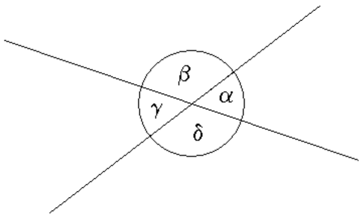
Rechteck

Nebenwinkel und Scheitelwinkel

G 7_04

Nebenwinkelpaare:
α und β
γ und δ

Scheitelwinkelpaare:
α und γ
β und δ



Nebenwinkel ergänzen sch zu 180°:

$$\alpha + \beta = 180°$$
$$\gamma + \delta = 180°$$

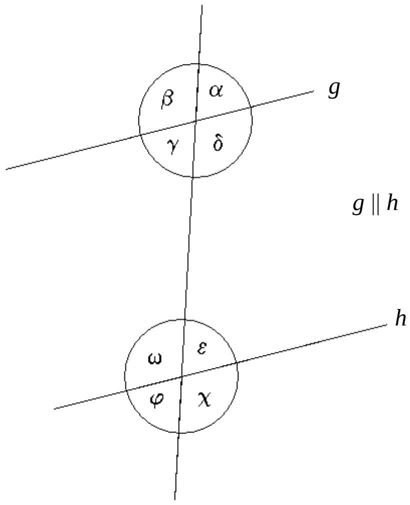
Scheitelwinkel sind gleich groß:

$$\alpha = \gamma$$
$$\beta = \delta$$

Wechselwinkel, Stufenwinkel **G 7_05**

Wechselwinkelpaare (Z-Winkel):
α und φ
β und χ
γ und ε
δ und ω

Stufenwinkelpaare (F-Winkel):
α und ε
β und ω
γ und φ
δ und χ

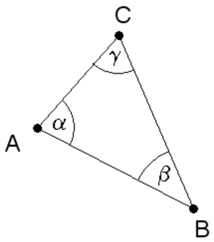


- **Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.**
- **Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.**

Winkelsumme im Dreieck und Viereck **G 7_06**

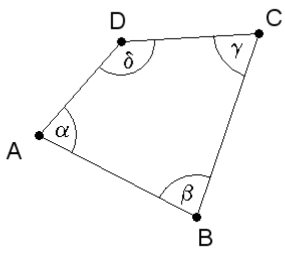
Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt 180°!

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



Die Innenwinkelsumme im Viereck beträgt 360°!

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$



Kongruenzsätze für Dreiecke **G 7_07**

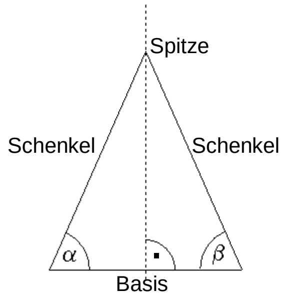
Zwei Figuren, die sich vollständig miteinander zur Deckung bringen lassen, nennen wir **deckungsgleich** oder **kongruent**.

Zwei **Dreiecke** sind kongruent, wenn sie

- in den Längen der drei Seiten übereinstimmen (**SSS**-Satz)
- in den Längen von zwei Seiten und in der Größe des dazwischen liegenden Winkels übereinstimmen (**SWS**-Satz).
- in der Länge einer Seite und in den Größen zweier Winkel übereinstimmen (**WSW**- bzw. **WWS**-Satz).
- in den Längen zweier Seiten und in der Größe des Winkels, der der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt, übereinstimmen (**SsW**-Satz).

Gleichschenklige Dreiecke **G 7_08**

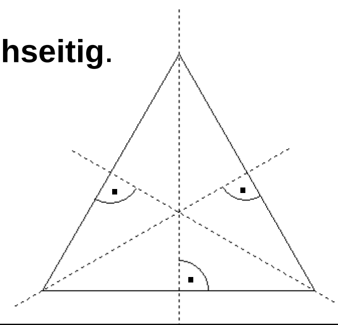
Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten (Schenkel) nennen wir **gleichschenklig**.



Eigenschaften gleichschenkliger Dreiecke:

- Gleichschenklige Dreiecke sind achsensymmetrisch.
- Die Symmetrieachse halbiert die Basis rechtwinklig und halbiert den Winkel an der Spitze.
- Die Basiswinkel sind gleich groß (hier: $\alpha = \beta$).

Dreiecke mit drei gleich langen Dreiecken nennen wir **gleichseitig**.



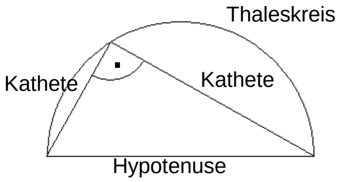
Eigenschaften gleichseitiger Dreiecke:

- Jeder Innenwinkel misst 60°.
- Die drei Symmetrieachsen halbieren die Dreiecksseiten rechtwinklig und halbieren die Innenwinkel.

Rechtwinklige Dreiecke

G 7_09

Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel 90° misst, nennen wir **rechtwinklig**.



Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke:

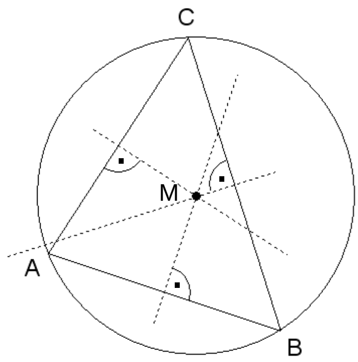
- Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf dem Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser (Thaleskreis).
- Wenn die Ecke C eines Dreiecks ABC auf dem Kreis über der Seite [AB] als Durchmesser liegt, dann besitzt das Dreieck bei C einen rechten Winkel (Satz des Thales).

Die Mittelsenkrechten im Dreieck

G 7_10

Alle Punkte, die von zwei Punkten A, B gleich weit entfernt sind, liegen auf der **Mittelsenkrechten** der Strecke [AB].
Bezeichnung: $m_{[AB]}$

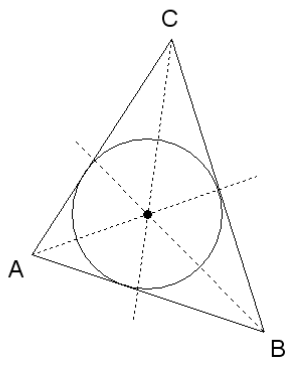
Die drei **Mittelsenkrechten eines Dreiecks** schneiden sich in genau einem Punkt.
Dieser ist von den drei Eckpunkten des Dreiecks gleich weit entfernt und somit Mittelpunkt M eines Kreises, der durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft. Diesen Kreis nennen wir den **Umkreis des Dreiecks**.



<u>Die Winkelhalbierenden im Dreieck</u> **G 7_11**

Alle Punkte, die von den zwei Schenkeln eines Winkels α gleich weit entfernt sind, liegen auf der **Winkelhalbierenden** des Winkels α.
Bezeichnung: w_α.

Die drei **Winkelhalbierenden eines Dreiecks** schneiden sich in genau einem Punkt.
Dieser ist von den drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt und somit Mittelpunkt M eines Kreises, der alle Dreiecksseiten berührt.
Diesen Kreis nennen wir den **Inkreis des Dreiecks**.



<u>Kreis und Tangente</u> **G 7_12**

Eine Gerade heißt **Passante** eines Kreises, wenn sie mit dem Kreis keinen Punkt gemeinsam hat.

Eine Gerade heißt **Sekante** eines Kreises, wenn sie den Kreis in zwei Punkten schneidet.

Eine Gerade heißt **Tangente** eines Kreises, wenn sie mit diesem genau einen Punkt gemeinsam hat.
Dieser Punkt heißt Berührpunkt.

Die Tangente eines Kreises steht im Berührpunkt senkrecht auf dem Radius!