Die Quadratwurzel

A 9_01

$\sqrt{a}$ ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x^2=a$. Diese existiert nur für $a\geq 0$. Die Zahl a unter der Wurzel heißt **Radikand**.
Beachte: $(\sqrt{a})^2=a$ für $a\geq 0$ und $\sqrt{a^2}=|a|$ für alle $a\in\mathbb{R}$.

Bsp: $\sqrt{25}=5$, da $5^2=25$. $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$, da $0{,}5^2=0{,}25$.
$\sqrt{-4}$ ist nicht definiert, da $x^2=-4$ keine Lösung besitzt.

Bestimmung von $\sqrt{3}$ mit Intervallschachtelung:

$1^2=1<3$ und $2^2=4>3$ => $\sqrt{3}\in[1;2]$
$1{,}7^2=2{,}89<3$ und $1{,}8^2=3{,}24>3$ => $\sqrt{3}\in[1{,}7;1{,}8]$
$1{,}73^2=2{,}9929<3$ und $1{,}74^2=3{,}0276>3$ => $\sqrt{3}\in[1{,}73;1{,}74]$
usw.

Die Menge der reellen Zahlen

A 9_02

Eine **Intervallschachtelung** besteht aus einer unendlichen Folge ineinander geschachtelter Intervall, deren Länge beliebig klein wird.

Die Bruchzahlen heißen auch **rationale Zahlen** $\mathbb{Q}$. Der Dezimalbruch einer rationalen Zahl ist entweder eine ganze Zahl, ein endlicher Dezimalbruch oder ein unendlicher periodischer Dezimalbruch.
Jeder unendliche, nicht periodische Dezimalbruch beschreibt eine **irrationale Zahl.**

Bsp. für irrationale Zahlen: 0,1001000100001....; $\sqrt{2}$; π

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der **reellen Zahle**n $\mathbb{R}$.

natürliche Zahlen: $\mathbb{N}=\{1;2;3;...\}$
ganze Zahlen: $\mathbb{Z}=\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$
rationale Zahlen: $\mathbb{Q}=\textit{Menge aller Brüche}$ (dazu gehören auch die ganzen Zahlen!)
reelle Zahlen: $\mathbb{R}=\textit{Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen}$

Die n-te Wurzel

A 9_03

$\sqrt[n]{a}$ ist die **nicht negative Lösung** der Gleichung $x^n = a$. Diese existiert nur für $a \geq 0$.

Beachte: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Beispiele: $\sqrt[3]{8} = 2$, da $2^3 = 8$

Potenzgleichungen: Die Gleichung $x^n = a$ hat bei

- **n gerade** entweder zwei, eine oder keine Lösung.

Bsp:

a) $x^4 = 2$ => $x_1 = \sqrt[4]{2}$ oder $x_2 = -\sqrt[4]{2}$

b) $x^4 = 0$ => $x = 0$

c) $x^4 = -2$ => keine Lösung

- **n ungerade** genau eine Lösung

Bsp:

a) $x^3 = 2$ => $x = \sqrt[3]{2}$

b) $x^3 = 0$ => $x = 0$

c) $x^3 = -2$ => $x = -\sqrt[3]{2}$

Rechenregeln für Wurzeln

A 9_04

Bsp.: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ aber $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, also $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Allgemein: $\boxed{\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

Eine Wurzel darf dagegen auf die einzelnen Glieder eines Produkts bzw. eines Quotienten verteilt werden:

Produktregel: $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$ **Quotientenregel:** $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

Anwendung: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

Teilweises Radizieren: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Rationalmachen des Nenners: $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Summe bzw. Differenz von Wurzeln: $5\sqrt{2} - \sqrt{2} \overset{DG}{=} (5-1) \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Potenzen mit rationalen Exponenten

A 9_05

Definition: $\boxed{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}}$ und $\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$

Bsp.: **a)** $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$ **b)** $8^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4$ **c)** $9^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{9}\right)^{-1}=\frac{1}{3}$

Rechnen mit Potenzen:

1. Beim Multiplizieren/Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis werden die Exponenten addiert/subtrahiert.

Bsp.: $4^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{2}}=2$ bzw. $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=4^{\frac{1}{6}}$

2. Eine Potenz wird potenziert indem man die Exponenten multipliziert.

Bsp.: $\left(8^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}=8^{-\frac{1}{2}\frac{2}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

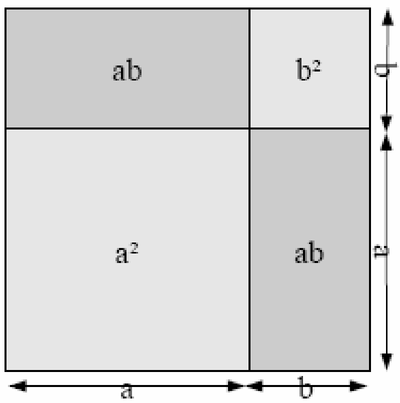
3. Beim Potenzieren eines Produkts wird jeder Faktor potenziert.

Bsp.: $(8\cdot 5)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}=2\cdot\sqrt[3]{5}$

Binomische Formeln

A 9_06

1. $(a+b)^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2$
1. $(a-b)^2=a^2-2\mathrm{ab}+b^2$
2. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$



Anwendung:

Ausmultiplizieren: $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=8+4\sqrt{6}+3=11+4\sqrt{6}$

Faktorisieren: $4x^2-1=(2\mathrm{x})^2-1^2=(2\mathrm{x}+1)(2\mathrm{x}-1)$

Umformen in ein Quadrat: $\sqrt{4\mathrm{x}^2+1-4\mathrm{x}}=\sqrt{(2\mathrm{x})^2-2\cdot 2\mathrm{x}\cdot 1+1^2}=\sqrt{(2\mathrm{x}-1)^2}=|2\mathrm{x}-1|$

Quadratische Gleichungen

A 9_07

Lösungen der quadratischen Gleichung $a x^2+bx+c=0$

1. **Reinquadratische Gleichung** (b=0):

Bsp.: $5x^2-15=0$ => $5x^2=15$ => $x^2=3$ => $x_1=\sqrt{3}$ oder $x_2=-\sqrt{3}$

2. **Faktorisieren** (c=0):

Bsp.: $2x^2-3x=0$ => $x\cdot(2x-3)=0$ => $\underline{x=0}$ oder $2x-3=0$ => $\underline{x=1{,}5}$

3. **Mit Lösungsformel**: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Bsp.: $3x^2-5x-2=0$ => $x_{1,2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}$ => $x_1=2$ oder $x_2=-\dfrac{1}{3}$

4. **Quadratische Ergänzung:**

Bsp.: $x^2-4x+3=0$ => $(x-4x+2^2)=-3+2^2$ => $(x-2)^2=1$ => $x-2=\pm\sqrt{1}$

=> $x_1=3$ oder $x_2=1$

Quadratische Funktionen

A 9_08

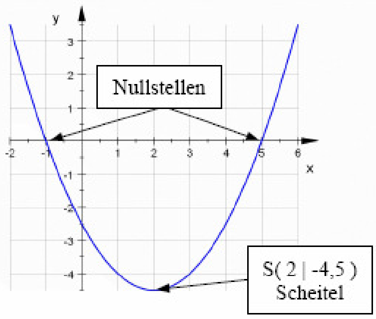
Normalform: $f(x)=a x^2+bx+c$

Der Graph heißt **Parabel**. Der Streckungsfaktor a bestimmt die Öffnung der Parabel:
a>0 : nach oben geöffnet
a<0: nach unten geöffnet

Für $|a|=1$ heißt sie **Normalparabel.**
Für $|a|>1$ ist die Parabel schlanker als die Normalparabel,
für $|a|<1$ weiter.

Der tiefste bzw. höchste Punkt heißt **Scheitel** der Parabel. Die Schnittpunkte mit der x-Achse heißen **Nullstellen** der Parabel.

Bsp.: $f(x)=0{,}5x^2-2x-2{,}5$



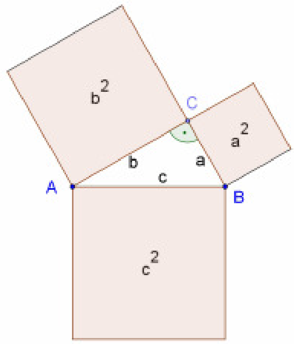
Scheitelform: $f(x)=a(x-x_s)^2+y_s$
=> Scheitel $S(x_s|y_s)$

Umformen der Normalform durch quadratisches Ergänzen führt auf die Scheitelform.

Bsp.: $f(x)=0{,}5x^2-2x-2{,}5=0{,}5\cdot(x^2-4x)-2{,}5=0{,}5\cdot(x-2)^2-4{,}5$ => Scheitel $S(2|-4{,}5)$

Faktorisierte Form: Sind x_1, x_2 Nullstellen der quadratischen Funktion f, so lässt sich $f(x)$ wie folgt darstellen: $f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

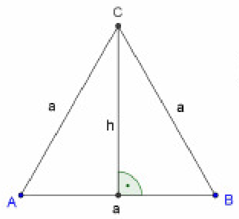
Satz des Pythagoras — G 9_01



Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse: **$a^2 + b^2 = c^2$**

Anwendungen:

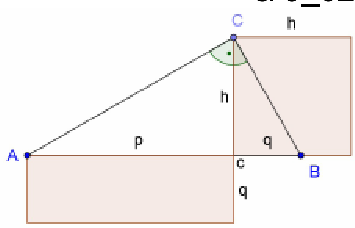
Diagonale des Quadrats: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ => $d = a\sqrt{2}$



Höhe des gleichseitigen Dreiecks:

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ => $h^2 = \frac{3}{4}a^2$ => $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$

Höhensatz und Kathetensatz — G 9_02



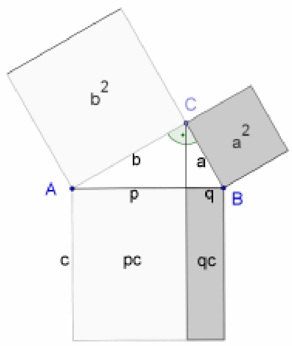
Höhensatz

Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten: $h^2 = p \cdot q$

Kathetensatz

Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus dem anliegenden Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse:

$a^2 = q \cdot c$ und $b^2 = p \cdot c$



Beispiel: Im Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ ist die Kathete a = 5cm und die Höhe h = 3cm lang. Berechne die Hypotenuse.

Es ist $q = \sqrt{a^2 - h^2}$ = 4cm und $p = h^2 : q$ = 2,25cm.

Also ist $c = p + q$ = 6,25cm.

Oder mithilfe des Kathetensatzes: $c = a^2 : q$ = 6,25cm

Die trigonometrischen Funktionen

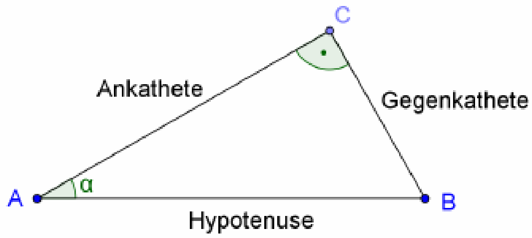
G 9_03

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

Tangens = $\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$

Sinus = $\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}$

Kosinus = $\frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}$

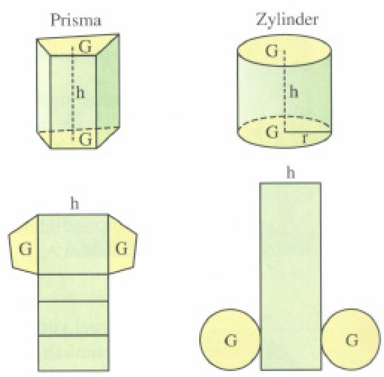


Zusammenhänge: $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Prisma und Zylinder

G 9_04

Für ein **Prisma** und einen **Zylinder** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:
Volumen: $V=G\cdot h$
Oberflächeninhalt $O=2G+M$
Für einen Zylinder mit Grundkreisradius r und Höhe h gilt:
Volumen V: $V=\pi r^2\cdot h$
Mantelfläche M: $M=2\pi r\cdot h$
Oberfläche O: $O=2\pi r^2+2\pi r\cdot h$



Pyramide und Kegel

G 9_05

Für eine **Pyramide** und einen **Kegel** mit der Grundfläche G, der Mantelfläche M und der Höhe h gilt:

Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

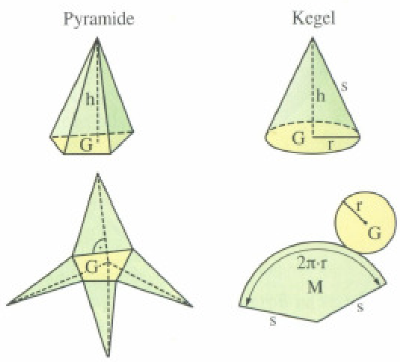
Oberflächeninhalt $O = G + M$

Für einen Kegel mit Grundkreisradius r, Mantellinie s und Höhe h gilt:

Volumen V: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Mantelfläche M: $M = \pi\, r \cdot s$

Oberfläche O: $O = \pi r^2 + \pi\, r \cdot s$



Mehrstufige Zufallsexperimente

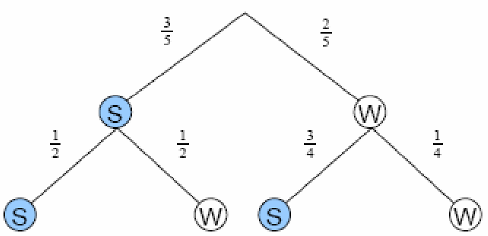
S 9_01

Pfadregeln

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem **Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades**.

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der **Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse**, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:
Aus einer Urne mit drei schwarzen Kugeln und zwei weißen Kugel werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurückzulegen.



Ergebnisraum: $\Omega = \{ss, sw, ws, ww\}$

$P(ss) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ $\qquad P(ww) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$P(\text{verschiedene Kugeln}) = P(sw) + P(ws) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{10}$